積分の定義

simple function u について積分 $\int u\,d\mu$ は自然に定義されている.

simple functionsの列 u_n が L_1-Cauchy列であるとは $m,n\to\infty$ で $\int |u_m-u_n|\,d\mu\to 0$ となることであると定める. このとき,

$$\left|\int u_m\,d\mu-\int u_n\,d\mu\right|\leqq\int|u_m-u_n|\,d\mu\to 0\quad(m,n\to\infty)$$

なので, $\int u_n\,d\mu$ はCauchy列になり収束する.

<u>補題</u> simple functionsの L_1-Cauchy列 u_n, v_n が同一の函数にa.e.各点収束するとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int v_n\,d\mu.$$

□

<u>定義</u> simple functionsの L_1-Cauchy列 u_n で f にa.e.収束するものをとり,

$$\int f\,d\mu:=\lim_{n\to\infty}\int u_n\,d\mu$$

と定める.

□

<u>注意</u> u_n は実数値simple functionsの単調増加列であり, $\int u_n\,d\mu$ は上に有界であると仮定する. このとき, $\int u_n\,d\mu$ はある α に収束する. $m\leqq n$ のとき,

$$\int|u_n-u_m|\,d\mu=\int u_n\,d\mu-\int u_m\,d\mu\leqq\alpha-\int u_m\,d\mu\to 0\quad(\text{as } m\to\infty).$$

ゆえに, u_m は L_1-Cauchy列である. したがって, u_n は f にa.e.収束するならば

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int u_n\,d\mu.$$

$\int u_n\,d\mu$ が有界でないとき, $\int f\,d\mu=\infty$ はwell-definedである.

単調減少の場合も同様である.

□

定理 $f=\sum_{i=1}^{\infty}f_i$, $f_i=\sum_{j=1}^{\infty}u_{ij}$, $u_{ij}\geqq 0$, u_{ij} は実数値simple functionsと仮定すると,

$$\int f\,d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int f_i\,d\mu.$$

証明

$$\int f\,d\mu=\sum_{i,j}\int u_{ij}\,d\mu=\sum_{i}\int f_i\,d\mu.$$

□

系 (単調収束定理) f_1が可積分でかつ f_n は可測函数列で単調増加するならば

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$ ($\int f_n d\mu$が有界ならこれは$<\infty$). (単調減少でも同様)

証明 $g_n = f_{n+1} - f_n \geqq 0$ とおくと, $g_n \geqq 0$, $f = f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ より. □

定理 (Lebesgueの収束定理)

φ は非負の実数値可積分函数であるとする: $\varphi \geqq 0$, $\int \varphi\, d\mu < \infty$.

f_nは可積分函数の列であり, 各点収束しているとする

$|f_n| \leqq \varphi$ $(n=1,2,\dots)$ と仮定する. このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

証明 $\psi_k := \sup_{m,n\geqq k} |f_n - f_m|$ とおく. $0 \leqq \psi_{k+1} \leqq \psi_k \leqq 2\varphi$ となる.

特に $0 \leqq \int \psi_1\,d\mu \leqq 2\int\varphi\,d\mu$ なので ψ_1 は可積分である.

f_nは各点収束しているので, 各xについて $f_n(x)$ は Cauchy列になり, $\lim_{k\to\infty}\psi_k(x) = 0$.

したがって単調収束定理より, $\lim_{k\to\infty}\int \psi_k\,d\mu = 0$. これより, $m,n \geqq k$のとき,

$$\int |f_n - f_m|\,d\mu \leqq \int \psi_k \to 0 \quad (k\to\infty).$$

これは f_n は L_1-Cauchy列であることを意味する.

次の補題より, f_n は $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ にL_1収束するので

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \leqq \int |f_n - f|\,d\mu \to 0 \quad (n\to\infty).$$ □

補題 f_nは可積分函数の L_1-Cauchy列であるとし, fに各点収束すると仮定する

このとき, fも可積分になり, f_nはfにL_1収束する.

証明 可積分函数の空間の完備性より, f_nはある可積分函数gにL_1収束する.
gへのL_1収束列は gにa.e.各点収束する部分列を持つことより, f_nのある部分列は
gにa.e.各点収束する. f_nはfに各点収束するので, $f=g$ a.e. ゆえに f_nはf
にL_1収束する. □

Fatouの補題 $f_n \geqq 0$, $\int f_n d\mu < \infty$ とし, $\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$ と仮定する. このとき,
$\liminf_{n\to\infty} f_n$ が a.e. 各点収束し, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ は可積分になり,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty.$$

証明 $g_{k,m}(x) := \min\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots, f_{k+m}(x)\}$ とおく. $g_{k,m} \geqq g_{k,m+1} \geqq 0$, $g_{k,0} = f_k$.
ゆえに単調収束定理より, $h_k := \lim_{m\to\infty} g_{k,m} = \inf_{n\geqq k} f_n$ は可積分になり,

$$\int h_k d\mu = \int \inf_{n\geqq k} f_n \, d\mu \leqq \int f_n \, d\mu \quad (n \geqq k).$$

ゆえに,

$$\int h_k d\mu = \int \inf_{n\geqq k} f_n \, d\mu \leqq \inf_{n\geqq k} \int f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

$h_k = \inf_{n\geqq k} f_n$ は $0 \leqq h_k \leqq h_{k+1}$ をみたしているので単調収束定理より,
$\lim_{k\to\infty} h_k$ も可積分になり,

$$\lim_{k\to\infty} \int h_k d\mu = \int \lim_{k\to\infty} h_k \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

以上を合わせると,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

□

系 (Lebesgueの収束定理) 実数値可測函数列 f_n は f に a.e. 各点収束し,
φ は非負実数値可積分函数で $|f_n| \leqq \varphi$ $(\forall n)$ をみたしているとする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f \, d\mu.$$

証明 $-\varphi \leqq f_n \leqq \varphi$ より, $\varphi + f_n \geqq 0$ かつ $\varphi - f_n \geqq 0$.
そして, $\int (\varphi + f_n) d\mu \leqq 2\int \varphi d\mu$, $\int (\varphi - f_n) d\mu \leqq 2\int \varphi d\mu$ より, $\varphi + f_n$ と $\varphi - f_n$ に Fatouの補題を適用できる. ゆえに,

$$\int \varphi d\mu + \int f d\mu = \int (\varphi + f) d\mu = \int \lim_{n\to\infty} (\varphi + f_n) d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int (\varphi + f_n) d\mu = \int \varphi d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

$$\int \varphi d\mu - \int f d\mu = \int (\varphi - f) d\mu = \int \lim_{n\to\infty} (\varphi - f_n) d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int (\varphi - f_n) d\mu = \int \varphi d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

$\therefore$ $\limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leqq \int f d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$ □

実数値函数の Lesbergue の収束定理は,

単調収束定理 $\Rightarrow$ Fatou の補題 $\Rightarrow$ Lesbergue の収束定理

の流れで示せる. さらに単調収束定理は次から得られる

定理 $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, $f_i = \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}$, $u_{ij} \geq 0$, u_{ij} は実数値 simple functions と仮定すると,

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

□

これは単に非負実数の無限和が和を取る順序によらないという結果にすぎない.

Fatou's lemma 再

f_n は可測, $f_n \geqq 0$, $\int f_n < \infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n < \infty$ と仮定する。

$g_{km}(x) := \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_{k+m}(x)\}$ とおく。

$g_{km}(x) \geqq 0$, $g_{km}(x)$ は単調減少, $g_{k1} = f_k$ より, $0 \leqq g_{k,m+1} \leqq g_{km} \leqq f_k$.

単調収束定理より, $h_k := \lim\limits_{m\to\infty} g_{km} = \inf\limits_{n\geqq k} f_n$ について

$$\int h_k = \int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \int f_n \quad (n \geqq k).$$

$$\therefore \int h_k = \int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \inf_{n\geqq k} \int f_n \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

$h_k \geqq 0$ は可積分で単調増加するので単調収束定理より,

$$\lim_{k\to\infty} \int h_k = \int \lim_{k\to\infty} h_k = \int \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

したがって,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

再

$$0 \leqq \int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \int f_n \quad (n \geqq k)$$

$\inf\limits_{n\geqq k} a_n$ は k について単調増加

$$0 \leqq \int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \inf_{n\geqq k} \int f_n \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n < \infty$$

仮定

不等式として自明

$$\lim_{k\to\infty} \int \inf_{n\geqq k} f_n = \int \liminf_{n\to\infty} f_n$$ ← 単調収束定理.